ตัวแบบแถวคอย

(Waiting Line or Queuing)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์กัญญารัตน์ บุษบรรณ

ตัวอย่างแถวคอย

รอเครื่องดื่มจากเครื่องบริการเครื่องดื่ม	การรอเพื่อที่จะเล่นเครื่องเล่น	การรอเติมน้ำมัน	การขึ้นลงของเครื่องบินที่สนามบิน
การรอเพื่อซื้ออาหาร	การรอเพื่อล้างรถยนต์	การรอเพื่อจ่ายเงินใน supermarket	การขนถ่ายสินค้า

ทำไมต้องมีแถวคอย

- ความต้องการรับบริการ > บริการที่จัดไว้
- ทำไมบริการไม่เพียงพอ?
  - ไม่คุ้มค่าทางเศรษฐกิจ
  - ไม่มีพื้นที่
  - ไม่สามารถพยากรณ์จำนวนผู้เข้ารับบริการ

คำถามที่น่าสนใจสำหรับลูกค้า

- นานเท่าไรที่ฉันต้องคอย?
- จำนวนคนในคิวมีมากน้อยเท่าไร?
- เมื่อไหรฉันจะได้รับบริการที่เร็วขึ้น?

คำถามสำหรับการเตรียมตัวเพื่อให้บริการที่น่าสนใจ?

- พื้นที่ในแถวคอยต้องมากน้อยเท่าไหร่?
- จำนวนลูกค้าที่ออกจากแถวคอยโดยไม่รับบริการมากน้อยแค่ไหน?
- เราควรมีช่องทางบริการเพิ่มหรือไม่?
- ควรใช้ระบบคิดแบบไหน?
- ควรเตรียมระบบอย่างไรที่จะทำให้แถวคอยเร็วขึ้น?

ผู้จัดการต้องการคิวที่สั้นอย่างเพียงพอ
เพื่อที่จะไม่ทำให้ลูกค้าไม่พอใจ

พฤติกรรมลูกค้า

Patient

เข้ามาในแถวคอยและคอย
จนกระทั่งได้รับบริการ

Reneging

ไม่สามารถทนรอได้และ
ออกจากแถวคอยไป

Jockeying

อาจเปลี่ยนแถวจากแถว
หนึ่งไปยังอีกแถวหนึ่ง

Balking

เมื่อมาถึงอาจไม่เข้า
รับบริการเนื่องจากคิว
ยาวเกินไป

ทฤษฎีแถวคอย

วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่จะเสนอการวิเคราะห์แถวคอย

ต้นทุนรวมต่ำสุด :

ต้นทุนการรอคอยของลูกค้า

ต้นทุนเกี่ยวกับสมรรถนะของการให้บริการ

จุดมุ่งหมาย

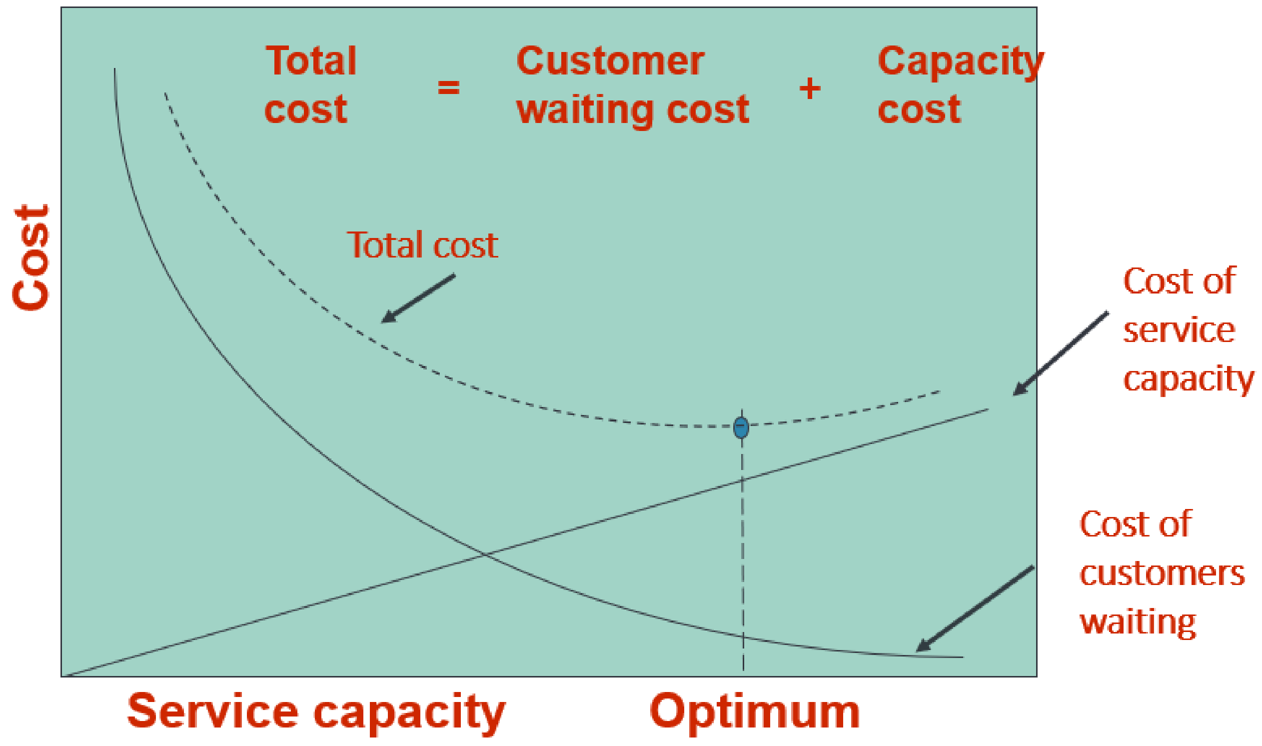
ตัวแบบแถวคอย

การอธิบายการดำเนินงานของระบบแถวคอยโดยแสดงข้อมูลเป็นตัวเลข ซึ่งนำไปช่วยในการวิเคราะห์ระบบและช่วยตัดสินใจในการบริหารจัดการแถวคอยเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพระบบ

การวิเคราะห์แถวคอย

ส่วนประกอบเบื้องต้นสำหรับกระบวนการแถวคอย

- การเข้ามา(Arrivals)
- ความสะดวกของการให้บริการ (Service facilities)
- แถวคอยในขณะนั้น(The actual waiting ling)

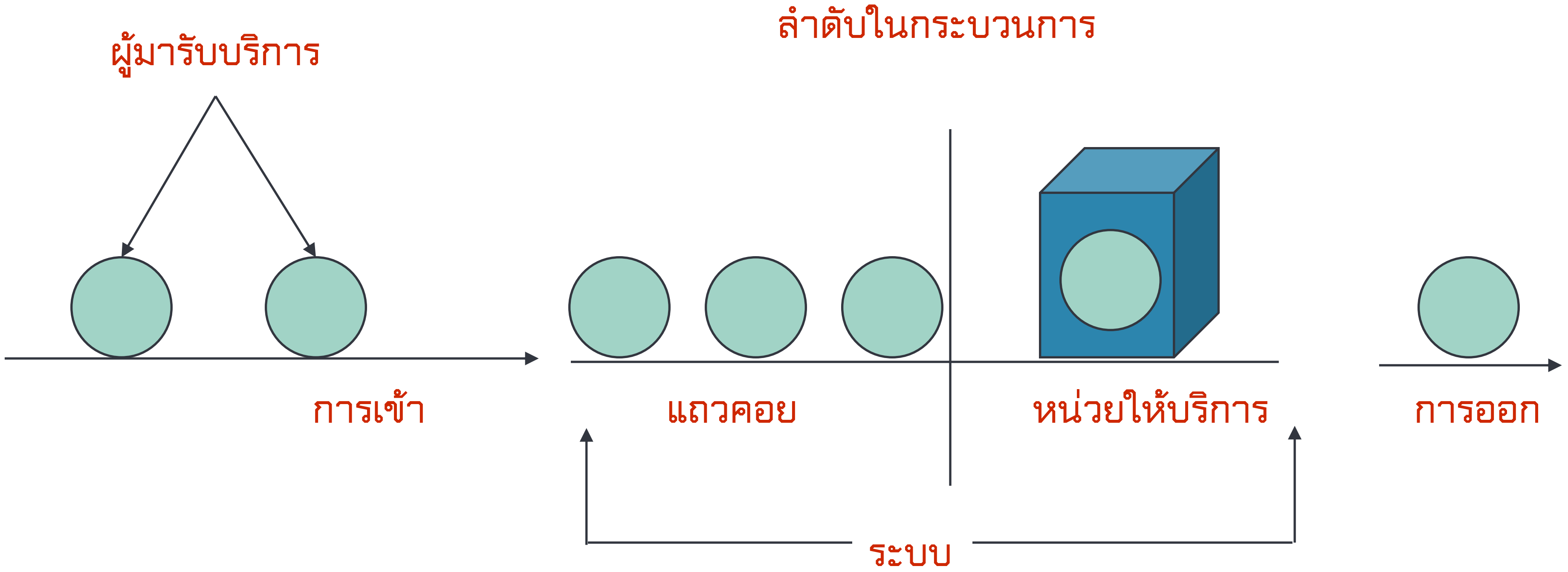


ลักษณะของระบบแถวคอย

ปัจจัยที่กำหนดลักษณะ

- ประชากรผู้เข้าใช้บริการ(ลูกค้า)(Population Source) ⇨ การเข้ามาแบบคงที่ / การเข้ามาแบบสุ่ม
    - ไม่จำกัด: ลูกค้าเข้ามาได้อย่างไม่จำกัด
    - จำกัด:จำนวนลูกค้าที่เป็นไปได้มีจำกัด
- จำนวนช่องทาง(Number of channels)
- รูปแบบของการเข้าและการให้บริการ(Arrival and service patterns)
- กฎระเบียบของคิวQueue discipline (order of service)

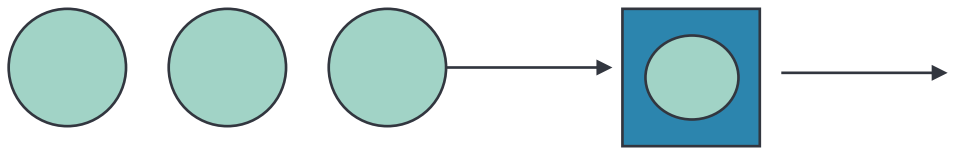
ระบบแถวคอย



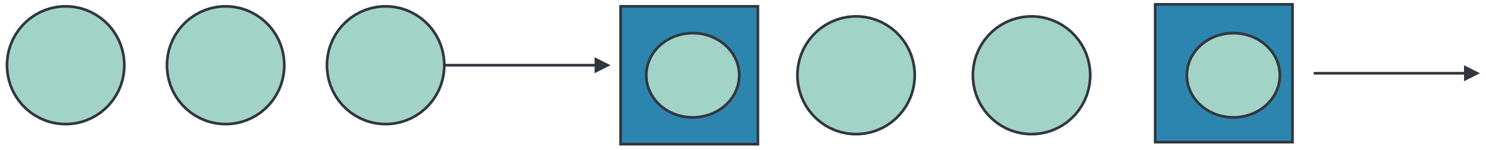
ผู้มารับบริการ
ลำดับในกระบวนการ
การเข้า
แถวคอย
หน่วยให้บริการ
การออก
ระบบ

แถวคอย

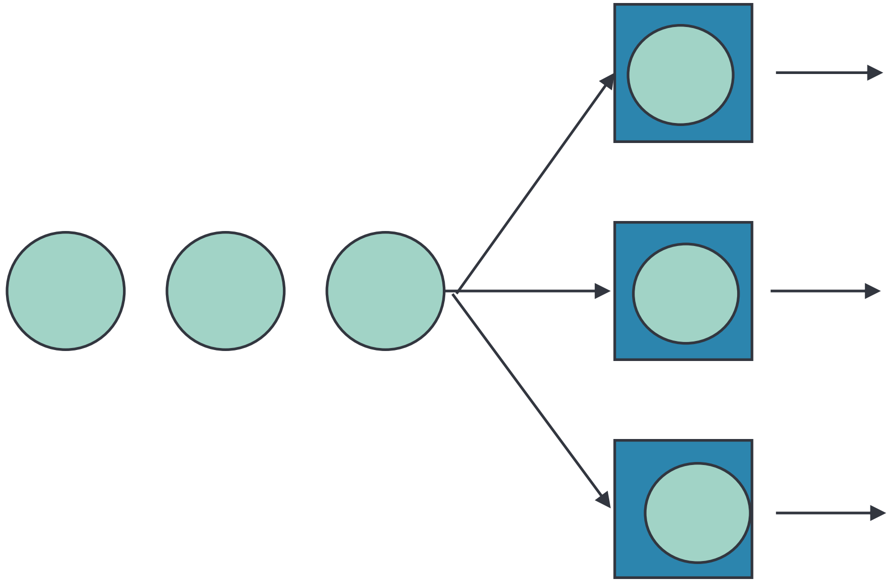
ช่องทางเดียวขั้นตอนเดียว



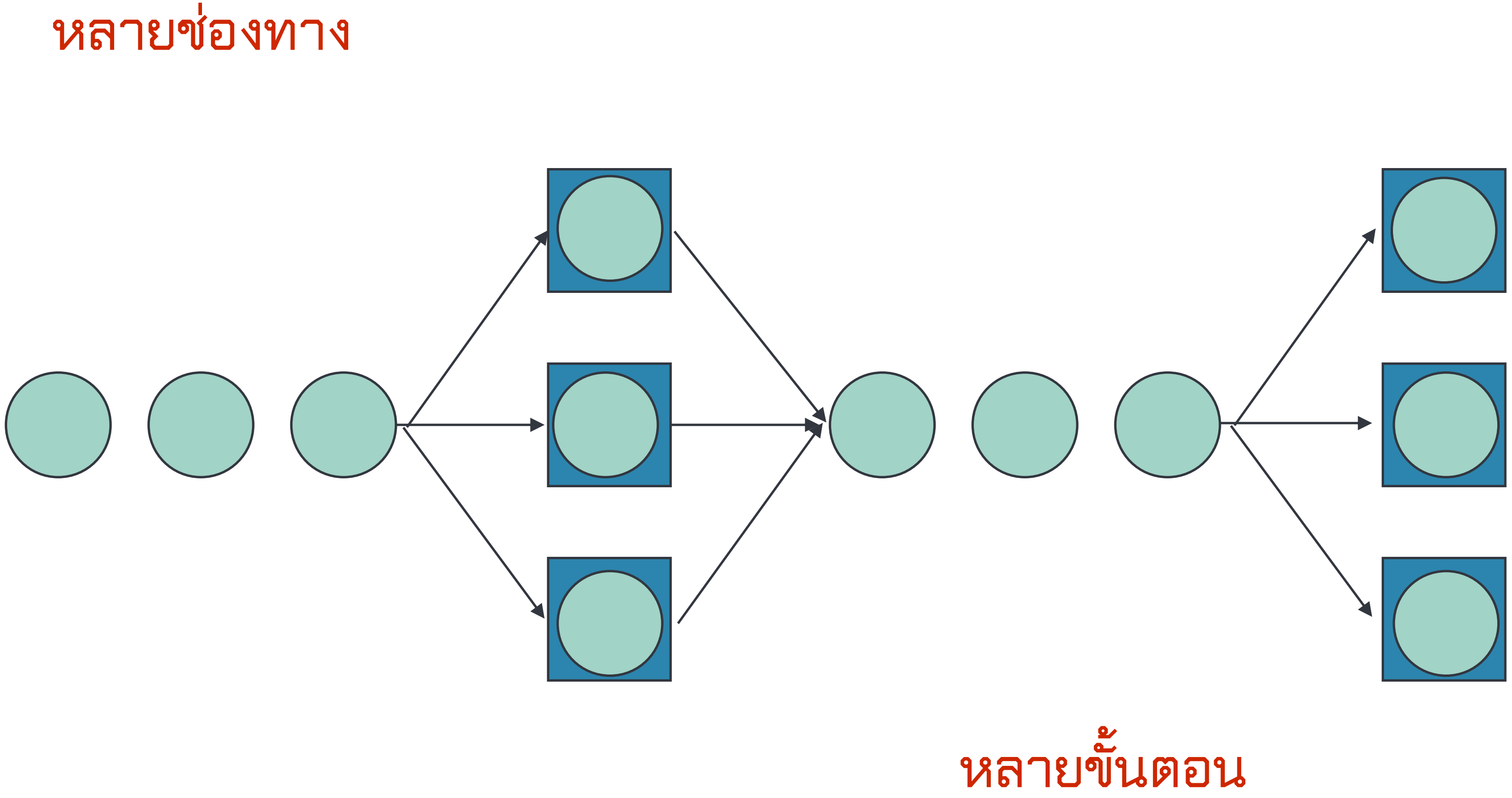
ช่องทางเดียวหลายขั้นตอน



หลายช่องทาง ขั้นตอนเดียว



แถวคอย



การเก็บข้อมูลระบบแถวคอย

ข้อมูลการเข้ารับบริการ

- อัตราการเข้ารับบริการ(arrival rate)
- เวลาเฉลี่ยระหว่างการเข้ารับบริการ (average interarrival time)
- พฤติกรรมการรอคอยของลูกค้า (สำหรับการวิเคราะห์จะสมมติให้ลูกค้าจะรอจนกว่าได้รับบริการ)

ข้อมูลการให้บริการ

- อัตราการให้บริการ(service rate) ข้อมูลจำนวนลูกค้าที่ให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา
- เวลาในการให้บริการ(service time) เวลาที่ใช้ในการบริการลูกค้าแต่ละราย

การแจกแจงความน่าจะเป็น

การแจกแจงปัวซอง

(อัตราการเข้ารับบริการ หรืออัตราการให้บริการ)

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2,\ldots$$

x แทนจำนวนลูกค้าที่เข้ารับบริการในช่วงเวลาใดเวลาหนึ่ง

λ แทนอัตราการเข้ารับบริการ

การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล

(เวลาระหว่างการเข้ารับบริการ หรือเวลาในการให้บริการหรืออัตราการให้บริการ)

$$P(\text{service time} > x) = e^{-\mu x}, x \geq 0$$

x แทนเวลาที่ให้บริการ

μ แทนอัตราการให้บริการ

ตัวแบบแถวคอย

เคนดอลโนเตชัน(Kendall notation):

การออบแบบตัวอักษรเพื่ออธิบายลักษณะของตัวแบบแถวคอย

A/B/C/K/N/D

A: การแจกแจงความน่าจะเป็นของการมารับบริการ

B: การแจกแจงความน่าจะเป็นของการให้บริการ

ซึ่งจะใช้อักษรต่อไปนี้แทนการแจกแจง

M หมายถึงการแจกจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง(ข้อมูลจำนวนลูกค้า)

หรือเอกซ์โปเนนเชียล(ข้อมูลเวลา)

D หมายถึงข้อมูลการให้บริการมีลักษณะคงที่

G หมายถึง การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทั่วไป

ตัวแบบแถวคอย

M/D/3

A/B/C/K/N/D

C: จำนวนช่องทางให้บริการ(channel) หรือ

จำนวนหน่วยบริการ(service facility)

K: ความยาวแถวคอย

N: จำนวนประชากร

ซึ่งจะใช้ ∞ แทนในตำแหน่ง K,N ในกรณีที่ไม่จำกัดความยาวของแถวคอยหรือจำนวนประชากรมีจำนวนมากมาย

D: ระเบียบการให้บริการ

FCFS หมายถึง มาก่อนให้บริการก่อน

LCFS หมายถึง มาทีหลังให้บริการก่อน

SIRO หมายถึง ใช้การสุ่มในการให้บริการ(service in random order)

สัญญลักษณ์ที่ใช้ในตัวแบบ

$\lambda =$ อัตราการเข้ารับบริการ(จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่เข้ามารับบริการในหนึ่งหน่วยเวลา)

$\mu =$ อัตราการให้บริการ(จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่หน่วยให้บริการแต่ละหน่วยให้บริการได้ในหนึ่งหน่วยเวลา)

$\frac{1}{\mu} =$ เวลาโดยเฉลี่ยที่ใช้ในการบริการลูกค้า 1 ราย

$\rho =$ ความน่าจะเป็นที่ระบบจะทำงาน

$P_0 =$ ความน่าจะเป็นที่ระบบจะว่าง

$L_s =$ จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบ

$L_q =$ จำนวนลูกค้าโดยเฉลี่ยที่อยู่ในระบบแถวคอย

$W_s =$ เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนเสียไปในการรับบริการในระบบ

$W_q =$ เวลาโดยเฉลี่ยที่ลูกค้าแต่ละคนใช้ในการรออยู่ในแถวคอย

$P_n =$ ความน่าจะเป็นที่มีลูกค้า n คนในระบบ

ตัวแบบแถวคอย

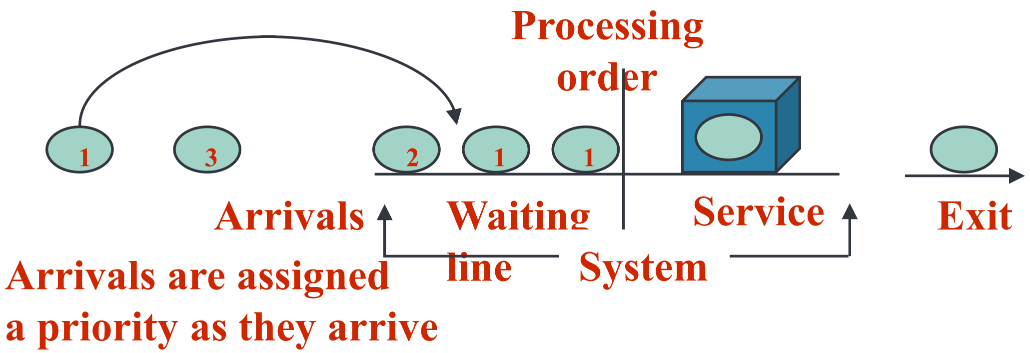
1. M/M/1
2. M/M/s
3. M/G/1
4. M/D/1
5. M/M/1 กับประชากรที่จำกัด

ตัวแบบ M/M/1 สมมติฐานของตัวแบบ : $\lambda < \mu$

ระบบแถวคอย

- อัตราการเข้ารับบริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง
- เวลาการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการเอกซ์โปเนนเชียล(หรืออัตราการให้บริการเป็นแบบสุ่ม มีการแจกจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง)
- การให้บริการแบบช่องทางเดียวและขั้นตอนเดียว
- ไม่จำกัดความยาวของแถวคอย
- จำนวนประชากรมากมาย
- มีระเบียบการให้บริการแบบมาก่อนได้รับบริการก่อน

สูตรคำนวณสำหรับ M/M/1



$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad P_0 = 1 - \rho \qquad P_n = P_0 \rho^n$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \qquad W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \rho L_s \qquad W_q = \rho W_s$$

ตัวอย่างที่ 1

ตู้เอทีเอ็มของธนาคารแห่งหนึ่งมี 1 ตู้ ตั้งอยู่ในนิคมอุตสาหกรรม จากการเก็บข้อมูลในอดีตพบว่าลูกค้าเข้ามาใช้บริการแบบสุ่มเฉลี่ยชั่วโมงละ 25 ราย มีการแจกแจงความน่าจะเป็นปัวซอง ในขณะที่ลูกค้าแต่ละรายใช้เวลามากน้อยต่างกันเฉลี่ยรายละ 1.5 นาที (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โพเนนเชียล)จงวิเคราะห์ระบบบริการของตู้เอทีเอ็ม

model : M/M/1

$\lambda = 25$ รายต่อชั่วโมง

$\mu = \dfrac{60}{1.5} = 40$ รายต่อชั่วโมง

$(\lambda < \mu)$

$$\rho = \frac{25}{40} = 0.625$$

$$P_0 = 1 - 0.625 = 0.375$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{25}{40-25} = 1.67$$

$$L_q = 0.625 \times 1.67 = 1.04$$

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{40-25} = \frac{1}{15}$$

$$W_q = \rho W_s = \frac{25}{40} \bullet \frac{1}{15} = \frac{1}{24}$$

สรุป โดยเฉลี่ยจะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1.67 คน และรอคอยเพื่อใช้ตู้เอทีเอ็ม 1.04 คน และต้องรอ 2 นาที 30 วินาที ต่อคนก่อนได้ใช้ตู้เอทีเอ็ม และโอกาสที่ตู้เอทีอ็มจะไม่ว่างเท่ากับ 0.625

ตัวอย่างที่ 2 M/M/1

มีตู้กดเงินหนึ่งตู้มีระยะเวลาห่างระหว่างการเข้ามาใช้บริการที่มีการแจกแจงเอกซ์โพเนนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ย 10 นาที และเวลาใช้ในการบริการมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนนเชียลโดยมีค่าเฉลี่ย 5 นาที มีแถวคอยไม่จำกัดความยาวและใครมาก่อนได้ใช้ก่อนจงตอบคำถามต่อไปนี้

1.ความน่าจะเป็นที่คนใช้บริการไม่ต้องรอเป็นเท่าไร

2.จงหาค่าวัดดำเนินการ

3.บริษัทจะเพิ่มตู้บริการถ้าผู้รับบริการใช้เวลาคอยและเวลาใช้เวลาในการบริการรวมไม่ต่ำกว่า 15 นาที ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้จะเพิ่มขึ้นเท่าใด

จากข้อมูล

$$\lambda = \frac{1}{10} \times 60 = 6$$ คนต่อชั่วโมง

$$\mu = \frac{1}{5} \times 60 = 12$$ คนต่อชั่วโมง

$$(\lambda < \mu)$$

ตัวอย่างที่ 2 model M/M/1

จากข้อมูล $\lambda = 6, \mu = 12$

1.ความน่าจะเป็นที่คนใช้ตู้เอทีเอ็มไม่ต้องรอ

คนเข้าใช้ตู้เอทีเอ็มโดยไม่ต้องรอก็ต่อเมื่อไม่มีใครในแถวคอยและไม่มีใครกำลังใช้ตู้เอทีเอ็ม นั้นคือระบบว่าง ความน่าจะเป็นที่ไม่ต้องรอคอยคือ

$$P_0 = 1 - \frac{6}{12} = 0.5$$

2. หาค่าวัดดำเนินการ

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{12-6} = 1 \qquad W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{12-6} = \frac{1}{6}$$

$$L_q = 0.5 \times 1 = 0.5 \qquad W_q = \rho W_s = \frac{6}{12} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

สรุป โดยเฉลี่ยจะมีลูกค้าอยู่ในระบบ 1 คน และรอคอยเพื่อใช้ ตู้เอทีเอ็ม 0.5 คน และต้องรอ 5 นาทีต่อคนก่อนได้ใช้ตู้เอทีเอ็ม และโอกาสที่ตู้เอทีเอ็มจะว่างเท่ากับ 0. 5

ตัวอย่างที่ 2 model M/M/1

3.บริษัทจะเพิ่มตู้บริการถ้าผู้รับบริการใช้เวลาคอยและเวลาใช้เวลาในการบริการรวมไม่ต่ำกว่า 15 นาที ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้จะเพิ่มขึ้นเท่าใด

หา λ ที่ทำให้ $W_s \geq \frac{15}{60}$

$$\frac{1}{12-\lambda} \geq \frac{1}{4}, \lambda \geq 8$$

อัตราคนเข้ามาใช้ตู้เอทีเอ็มควรเพิ่มขึ้น
เป็นมากกว่าหรือเท่ากับ 8 คนต่อชั่วโมง

ต้องมีอัตราคนเข้าใช้ตู้เอทีเอ็มอย่างน้อย 8 คนต่อชั่วโมง ซึ่งเดิมมีอัตราการเข้าใช้ 6 คนต่อชั่วโมง ดังนั้นอัตราคนเข้ามาใช้ตู้เอทีเอ็มต้องเพิ่มขึ้น 2 คนต่อชั่งโมงจึงจะติดตั้งตู้เอทีเอ็มเพิ่มหนึ่งตู้

ตัวอย่างที่ 3 M/M/1

บริษัทส่งออกสินค้าประเภทเหล็กต้องการขนส่งสินค้าไปเก็บที่คลังสินค้าของบริษัท รถขนส่งจะมาส่งสินค้าโดยเฉลี่ยวันละ 1 คัน โดยคนงานจะขนสินค้าจากรถบรรทุก ซึ่งคนงาน n คนจะขนสิ้นค้าได้ 0.8n คันรถต่อวัน ถ้าไม่มีการขนสินค้าออกจากรถบรรทุกจะเสียค่าเสียหายวันละ 300 บาท ส่วนค่าจ้างคนงานขนของเป็น 105 บาทต่อวัน ทางบริษัทควรจะจ้างคนงานขนสินค้ากี่คน ถ้ารถบรรทุกที่เข้ามาส่งสินค้ามีการแจกแจงปัวซอง

จากข้อมูล $\lambda = 1$ คันต่อวัน

$\mu = 0.8n$ คันต่อวัน

ข้อตกลง $\lambda < \mu$ จะได้ว่า $n > 1.25$

M/M/c หรือ M/M/S model: ระบบแถวคอยที่มีขั้นตอนเดียวแต่หลายช่องทาง

Assumptions: $\lambda < s\mu$

Number of servers = s

Number of phases = 1

Input source: infinite, no balking or reneging

Arrival distribution: Poisson; mean arrival rate = λ

Service distribution: Exponential; mean service rate = μ

mean service time = $1/\mu$

Waiting line: single line; unlimited length

Priority discipline: FCFS

Operating Characteristics M/M/s

Average utilization: $$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Probability that zero customers are in the system:

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(\frac{1}{1-\rho})]^{-1}$$

Probability that *n* customers are in the system:

$$\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad , 0 < n < s-1$$

$$\frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\,s^{n-s}} P_0 \quad , n \geq s$$

Operating Characteristics M/M/s

Average number of customers in line: $L_q = \dfrac{P_0 (\lambda / \mu)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$

Average time spent in the system: $\mathrm{W_S} = \mathrm{W_q} + \dfrac{1}{\mu}$

Average time spent in line: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Average number of customers in the system: $\mathrm{L_s} = \lambda \mathrm{W_S} = \mathrm{L_q} + \dfrac{\lambda}{\mu}$

ตัวอย่างที่ 4 : M/M/S

บริการขนถ่ายสินค้าของศูนย์การกระจายสินค้าแห่งหนึ่งมีท่าเทียบรถบรรทุก 3 จุด (A,B,C) รถบรรทุกที่เข้ามาเพื่อขนของขึ้นลงจะจอดเป็นแถวคอยเดียว และเมื่อท่าเทียบรถหมายเลขใดว่างก็จะเข้าจอดเพื่อขนถ่ายสินค้า โดยเข้ารับบริการก่อนหลังตามลำดับที่มาถึง ลูกค้าของศูนย์กระจายสินค้ามีมากรายและมีพื้นที่ที่รถจอดรอในแถวคอยได้มาก โดยเฉลี่ยแล้วรถจะเข้าเพื่อขนถ่ายสินค้าในอัตราเฉลี่ย 9 คันต่อชั่วโมง(การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง) ในขณะที่คนงานใช้เวลาในการขนถ่ายสินค้าเฉลี่ยคันละ 12 นาที (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกโพแนนเซียล) หรือบริการได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 5 คัน จงวิเคราะห์ระบบการให้บริการ

$\lambda = 9$ คันต่อชั่วโมง

$\mu = 5$ คันต่อชั่วโมง

$s = 3$

$$\lambda < s\mu$$

Operating Characteristics M/M/s : $\lambda = 9 \quad \mu = 5 \quad \lambda < s\mu$

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{9}{15} = 0.60$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(\frac{1}{1-\rho})]^{-1} = \frac{1}{\left[\frac{(1.8)^0}{0!} + \frac{(1.8)^1}{1!} + \frac{(1.8)^2}{2!}\right] + \left[\frac{(1.8)^3}{3!} \cdot \frac{(15)}{15-9}\right]} = 0.1460$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^S \rho}{S!(1-\rho)^2} = \frac{0.1460(1.8)^3(0.6)}{3!(1-0.6)^2} = 0.5321$$ คัน

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0591 + 1/5 = 0.2591$$ ชั่วโมง

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.5321}{9} = 0.0591$$ ชั่วโมง

$$L_s = \lambda W_S = 9(0.2591) = 2.332$$ คัน

ตัวอย่างที่ 5 M/M/S: $(\lambda < s\mu)$

ผู้บริหารธนาคารแห่งหนึ่งต้องตัดสินใจว่าควรมีจำนวนพนักงานให้บริการกี่คน โดยลูกค้าเข้ามารับบริการในอัตราเฉลี่ยชั่วโมงละ 40 คน โดยผู้ให้บริการแต่ละคนจะให้บริการได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 10 คน ทางธนาคารควรจ้างพนักงานกี่คนที่จะทำให้เวลาเฉลี่ยที่ลูกค้าต้องคอยไม่เกิน 0.75 นาที ถ้าลูกค้าที่เข้ามารับบริการมีการแจกแจงแบบปัวซอง

ปัญหานี้เป็นปัญหา M/M/s โดยต้องการหาค่า s ที่ทำให้ $W_q \leq 0.75$ นาที โดยมี $\mu = 10$ $\lambda = 40$

ดังนั้น $s \geq 5$ $\left[\rho = \dfrac{\lambda}{S\mu} < 1\right]$

s	P_0	L_q	W_q (ชม)	W_q (นาที)
5	.013	2.219	.0555	3.33
6	.0163	0.580	.0145	0.87
7	.018	0.182	.0046	0.276

M/G/1 model : การให้บริการแบบสุ่มแต่การแจกแจงความน่าจะเป็นของเวลาที่ให้บริการไม่ใช่เอ็กซ์โพแนนเชียล

Assumptions: $\lambda < \mu$

Number of servers = 1

Input source: infinite, no balking or reneging

Arrival distribution: Poisson; mean arrival rate = λ

Service distribution: General; mean service rate = μ

mean service time = $1/\mu$

Waiting line: single line; unlimited length

Priority discipline: FCFS

Operating Characteristics M/G/1

Average utilization: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Probability that zero customers are in the system: $P_0 = 1 - \rho$

Probability that *n* customers are in the system: $P_n = (\lambda / \mu)^n P_0$

Average number of customers in line: $L_q = \dfrac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$

Average time spent in the system: $W_S = W_q + \dfrac{1}{\mu}$

Average time spent in line: $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$

Average number of customers in the system: $L_s = \lambda W_S$

ตัวอย่างที่ 6 M/G/1

นักศึกษาที่เข้ามาใช้บริการยืมหนังสือของสำนักวิทยบริการของมหาวิทยาลัยเข้ามาในลักษณะสุ่มเฉลี่ยชั่วโมงละ 45 คน(การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง)เจ้าหน้าที่ 1 คนให้บริการในลักษณะสุ่มโดยใช้เวลาบริการนักศึกษาแต่ละคนเฉลี่ยคนละ 1 นาที (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทั่วไป)โดยมีค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 30 วินาที จำนวนนักศึกษาที่จะใช้บริการมีมากรายและความยาวของแถวคอยไม่จำกัด โดยจะให้บริการตามลำดับก่อนหลังของการเข้ามารับบริการ จงวิเคราะห์ระบบให้บริการ

ลักษณะระบบบริการแบบ M/G/1, $\lambda = 0.75$ คน/นาที , $\mu = 1$ คน/นาที $\lambda < \mu$

Operating Characteristics M/G/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.75/1 = 0.75$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.75 = 0.25$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = 0.09$$ คน

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 1.12$$ นาที

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.12$$ นาที

$$L_s = \lambda W_S = 0.84$$ คน

M/D/1 model

Assumptions: $\lambda < \mu$

Number of servers = 1

Input source: infinite, no balking or reneging

Arrival distribution: Poisson; mean arrival rate = λ

Constant service rate = μ

Waiting line: single line; unlimited length

Priority discipline: FCFS

Operating Characteristics M/D/1

Average utilization: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Probability that zero customers are in the system: $P_0 = 1 - \rho$

Average number of customers in line: $L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$

Average time spent in the system: $W_S = W_q + \frac{1}{\mu}$

Average time spent in line: $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Average number of customers in the system: $L_s = \lambda W_S$

ตัวอย่างที่ 7 M/D/1 : $\lambda < \mu$

ตู้จำหน่ายเครื่องดื่มอัตโนมัติที่ห้องอาหารในโรงงานแห่งหนึ่ง ในตู้จะมีเฉพาะน้ำอัดลมราคาขวดละ 10 บาท ตู้อัตโนมัติจะรับเฉพาะเหรียญ 5บาท และ 10 บาทเท่านั้น ผู้ที่ใช้บริการคือพนักงานในโรงงานซึ่งมีจำนวนมากและสามารถเข้าคิวรอได้ไม่จำกัดจำนวนในลักษณะที่เป็นแถวคอยตามลำดับการมาก่อนหลัง พนักงานเข้ามาใช้บริการค่อนข้างมากในช่วงก่อนและหลังเวลาทำงานและช่วงพัก แต่จะมีจำนวนน้อยในช่วงเวลาทำงาน เฉลี่ยแล้วพนักงานเข้ามาใช้บริการชั่วโมงละ 72 คน (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง)ขณะนี้โรงงานมีตู้จำหน่ายเครื่องดื่ม 1 ตู้ พนักงานแต่ละคนจะซื้อเครื่องดื่ม 1 ขวดเมื่อหยอดเหรียญครบ 10 บาท แล้วเลือกเครื่องดื่มที่ต้องการ จะได้รับน้ำอัดลมในช่องด้านล่างของตู้ รวมเวลาตั้งแต่หยอดเหรียญจนได้รับสินค้า 15 วินาทีคงที่ จงวิเคราะห์ระบบการให้บริการ

ลักษณะระบบบริการแบบ M/D/1, $\lambda = 1.2, \mu = 4$ **(คน/นาที)**

Operating Characteristics M/D/1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.2/4 = 0.3$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)} = 0.0643$$ คน

$$W_S = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.3036$$ นาที (18.2 วินาที)

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.0536$$ นาที (3.2 วินาที)

$$L_s = \lambda W_S = 0.3643$$ คน

M/M/1/∞/N/FCFS(Finite-Source, Single-Server Model) : $\lambda < \mu$

เหมาะกับระบบแถวคอยขนาดเล็ก ประชากรไม่เกิน 25

Number of servers = 1

Number of phases = 1

Input source: finite, equals *N* customers (N<25)

Arrival distribution: Exponential interarrival times; λ **mean =** $1/\lambda$

Service distribution: Exponential; mean service rate = μ

mean service time = $1/\mu$

Waiting line: single line; no more than *N* - 1

Priority discipline: FCFS

Probability that zero customers are in the system: $P_0 = [\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} (\frac{\lambda}{\mu})^n]^{-1}$

Finite-Source, Single-Server Operating Characteristics

Average utilization: $\rho = 1 - P_0$

Average number of customers in line: $L_q = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}(1 - P_0)$

Average number of customers in the system: $L_s = L_q + (1 - P_0)$

Average time spent in line: $W_q = L_q[(N - L)\lambda]^{-1}$

Average time spent in the system: $W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$

Probability that n customers are in the system: $P_n = P_0 \frac{N!}{(N-n)!}(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad ,n=0,1,2,\ldots,N$

ตัวอย่างที่ 8 Finite-Source, Single-Server Model

โรงพิมพ์แห่งหนึ่งมีเครื่องพิมพ์ขนาดใหญ่ 3 เครื่อง(N=3) เครื่องพิมพ์มักจะมีปัญหาติดขัดเล็กๆน้อยๆ จนถึงปัญหาใหญ่ที่ต้องใช้เวลาแก้ไขนานนับชั่วโมงอยู่เสมอ เฉลี่ยแล้วจะมีเครื่องพิมพ์ที่เกิดปัญหาชั่วโมงละ 1 เครื่อง โรงพิมพ์ได้จัดให้มีช่าง 1 คน ทำหน้าที่ดูแลแก้ปัญหา และซ่อมแซมเครื่องพิมพ์ ช่างจะใช้เวลาซ่อมแซมเครื่องพิมพ์เฉลี่ยเครื่องละ 30 นาที โดยเครื่องพิมพ์แต่ละเครื่องมีความสำคัญเท่ากัน ดังนั้นเครื่องใดเสียก่อนช่างจะซ่อมให้ก่อน ทั้งนี้ไม่จำกัดจำนวนเครื่องพิมพ์ที่รออยู่ในแถวคอยซ่อม จงวิเคราะห์ระบบ

ลักษณะระบบซ่อมของโรงพิมพ์เป็นแบบบริการแบบ M/M/1/∞ /3/FCFS

$\lambda = 1$ เครื่องต่อชั่วโมง $\mu = 2$ เครื่องต่อชั่วโมง $N = 3$

Finite-Source, Single-Server Operating Characteristics

$$P_0 = [\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!} (\frac{\lambda}{\mu})^n]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{3} \frac{3!}{(3-n)!} \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]^{-1} = 0.2105$$

$$L_q = N - \frac{(\lambda + \mu)}{\lambda}(1 - P_0) = 3 - \left[3(1 - 0.2105) \right] = 0.6315$$ เครื่อง

$$L_s = L_q + (1 - P_0) = 0.6315 + (1 - 0.2105) = 1.421$$ เครื่อง

$$W_q = L_q[(N - L)\lambda]^{-1} = \frac{0.6315}{(3 - 1.421)(1)} = 0.4$$ ชั่วโมง (24 นาที)

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.4 + \frac{1}{2} = 0.9$$ ชั่วโมง (54 นาที)

ค่าใช้จ่ายของระบบแถวคอย(Queuing cost)

=(number of channels) (cost per channel)

total service cost = mC_s เงินเดือน ค่าจ้าง ค่าเครื่องมือ เป็นต้น

=(total time spent waiting by all arrivals $\times$ (cost of waiting)

= (number of arrivals)(average wait per arrival)C_w

$$= (\lambda W)C_w$$

$$(\lambda W_q)C_w$$

Total Cost

or

ตัวอย่างที่ 8

บริการขนถ่ายสินค้าของศูนย์การกระจายสินค้าแห่งหนึ่งมีท่าเทียบรถบรรทุก 3 จุด (A,B,C) รถบรรทุกที่เข้ามาเพื่อขนของขึ้นลงจะจอดเป็นแถวคอยเดียว และเมื่อท่าเทียบรถหมายเลขใดว่างก็จะเข้าจอดเพื่อขนถ่ายสินค้า โดยเข้ารับบริการก่อนหลังตามลำดับที่มาถึง ลูกค้าของศูนย์กระจายสินค้ามีมากรายและมีพื้นที่ที่รถจอดรอในแถวคอยได้มาก โดยเฉลี่ยแล้วรถจะเข้าเพื่อขนถ่ายสินค้าในอัตราเฉลี่ย 9 คันต่อชั่วโมง(การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปัวซอง) ในขณะที่คนงานใช้เวลาในการขนถ่ายสินค้าเฉลี่ยคันละ 12 นาที (การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเอกโพแนนเซียล) หรือบริการได้เฉลี่ยชั่วโมงละ 5 คัน ถ้าค่าใช้จ่ายการให้บริการคิดเป็นหน่วยละ 200 บาทต่อชั่วโมง และรถบรรทุกแต่ละคันมีค่าใช้จ่ายในการเสียเวลาคิดเป็น 100 บาทต่อชั่วโมง จงคำนวณค่าใช้จ่ายรวมของระบบขนถ่ายสินค้าปัจจุบัน

วิธีทำ $\lambda = 9$ $\mu = 5$ $\rho = 0.60$ $P_0 = 0.1460$

$L_q = 0.5321$ $L_s = 2.332$ $W_q = 0.0591$ $W_S = 0.2591$

จำนวนรถในระบบปัจจุบัน โดยเฉลี่ย 2.332 คัน เวลารอรับบริการโดยเฉลี่ย 0.0591 ชั่วโมง หรือ 3.546 นาที

ค่าใช้จ่ายรวมของระบบขนถ่าย = 3(200)+9*0.2591(100)= 3(200)+2.332(100)

วิธีทำ

$\lambda = 9 \quad \mu = 5$

$\rho = 0.60 \quad L_q = 0.5321 \quad W_q = 0.0591$

$P_0 = 0.1460 \quad L_s = 2.332 \quad W_S = 0.2591$

จำนวนรถในระบบปัจจุบัน โดยเฉลี่ย 2.332 คัน

เวลารอรับบริการโดยเฉลี่ย 0.0591 ชั่วโมง หรือ 3.546 นาที

ค่าใช้จ่ายรวมของระบบขนถ่าย = 3(200)+9*0.2591(100)

= 3(200)+2.332(100)

= 600 +233.2 =833.20 บาทต่อชั่วโมง

ตารางเปรียบเทียบการดำเนินงานและค่าใช้จ่าย

	M/M/2	M/M/3	M/M/4
λ	9	9	9
μ	5	5	5
ρ	0.9	0.6	0.45
P_0	0.0526	0.1460	0.1616
L_q	7.6763	0.5321	0.1052
L_s	9.4737	2.3321	1.9052
W_q	0.8526	0.0591	0.0117
W_S	1.0526	0.2591	0.2177
ค่าใช้จ่ายในการให้บริการ(บาท/ชม.)	400	600	800
ค่าใช้จ่ายในการเสียเวลา(บาท/ชม.)	947.37	233.21	190.52
ค่าใช้จ่ายรวม(บาท/ชม.)	1,347.37	833.21	990.52

การตัดสินใจเกี่ยวกับระบบแถวคอย

- การตัดสินใจกำหนดจำนวนหน่วยให้บริการ
- การตัดสินใจจัดรูปแบบแถวคอย
- การตัดสินใจเลือกหน่วยให้บริการ
- การเพิ่มประสิทธิภาพของหน่วยให้บริการ